به نام زندگی

چند مثال :

مثال ۱ - در یک آزمایشگاه به مقاومت های نیاز داریم که مقدار آنها دقیقاً برابر 10Ω باشد. اگر بدانیم ۱٪ مقاومت های موجود در بازار، این ویژگی را دارند، چند مقاومت باید خریداری کنیم تا با احتمال 95٪ دست کم یکی از مقاومت‌ها برابر 10Ω باشد.

فرض کنیم n مقاومت خریداری شده است.

$A \equiv$ پیش آمد اینکه دست کم یکی از مقاومت‌های خریداری شده، دقیق باشد

$\equiv$ $\underbrace{\text{یک مقاومت دقیق باشد}}_{A_1}$ یا $\cup$ $\underbrace{\text{دو مقاومت دقیق}}_{A_2}$ یا $\cup$ ... یا $\cup$ $\underbrace{n \text{ مقاومت دقیق}}_{A_n}$

$P(A) = 0.95$, $P \equiv \frac{1}{100} =$ احتمال پیش آمد مورد نظر

دقیق بودن مقاومت‌ها

روند کلی حل مسئله این است که $P(A)$ برحسب n به دست بیاوریم و

برابر 0.95 قرار دهیم و با حل کردن معادله حاصل، n را به دست بیاوریم.

اما پیش آمد A، اجتماع n پیش آمد (جدا از هم) است و محاسبه‌ی

آن می‌تواند پیچیده باشد. به طور کلی در این گونه مسائل، یکی از راهکارهای حل

مسئله، این است که احتمال پیش آمد مکمل A را در نظر بگیریم.

$A^c \equiv$ پیش آمد اینکه هیچ یک از n ساعت خریداری شده دقیق نباشند

می‌دانیم $P(A^c) = 1 - P(A) = 1 - 0.95 = 0.05$

از طرف دیگر

$$P(A^c) = \binom{n}{0} p^0 (1-p)^n = 0.05$$

آزمایش های برنولی

$\frac{1}{100}$

$$\Longrightarrow \underbrace{\binom{n}{0}}_{1} \underbrace{\left(\frac{1}{100}\right)^0}_{1} \left(\frac{99}{100}\right)^n = 0.05$$

$$\Longrightarrow (0.99)^n = 0.05$$

$$\xRightarrow{\log} n \log(0.99) = \log(0.05)$$

$$\Longrightarrow n = \frac{\log(0.05)}{\log(0.99)} = 298.07 \rightarrow 299$$

مثال 2 : یک نوع دیود داریم که احتمال خرابی آن قبل از 1000 ساعت کار، برابر 0.15 است. در آزمایشگاه از این دیود 100 عدد موجود است. احتمال اینکه 95 عدد یا بیشتر از این دیودها قبل از 1000 ساعت کار خراب شوند، چقدر است؟

احتمال پیش‌آمد موفقیت $= P = 0.15$

دیود قبل از 1000 ساعت کار خراب شود

$A \equiv$ پیش آمد اینکه 95 دیود یا بیشتر، قبل از 1000 ساعت کار خراب بشوند

95 یا 96 ... یا 100

$$\Rightarrow P(A) = \sum_{i=95}^{100} \binom{100}{i} p^{i} (1-p)^{n-i}$$, $n=100$

$$\Rightarrow P(A) = \sum_{i=95}^{100} \binom{100}{i} (0.15)^{i} (0.85)^{100-i}$$

این پیش آمد را می‌توان به صورت زیر نیز در نظر گرفت

$A =$ تعداد 5 دیود از یکسری تا قبل از 1000 ساعت کار سالم باشند

5 یا 4 یا ... یا 0

$$\Rightarrow P(A) = \sum_{j=0}^{5} \binom{100}{j} (0.85)^{j} (0.15)^{100-j}$$

احتمال پیش آمد مورد نظر $= 1 - 0.15 = 0.85$

قبل از 1000 ساعت کار، سالم باشد

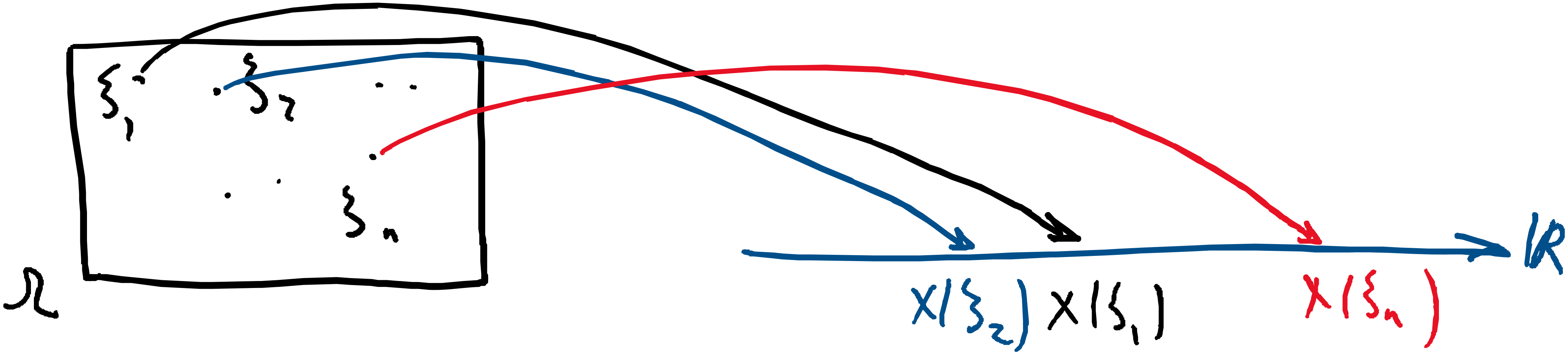
Random Variables (RV) متغیرهای تصادفی

در بخش‌های قبل با مفهوم فضای احتمال و پیش‌آمدها آشنا شدیم و راه‌های به دست آوردن احتمال هر پیش‌آمد دلخواه را معرفی کردیم.

در این بخش می‌خواهیم با مفهوم متغیر تصادفی آشنا شویم. فلسفه تعریف متغیر تصادفی، این است که در کار با احتمال، ما علاقه‌مند هستیم که به جای نقاط فضای نمونه، با اعداد حقیقی کار کنیم.

* یک متغیر تصادفی $X(\xi)$ تابعی است که به هر نقطه از فضای نمونه یک عدد حقیقی نسبت می‌دهد.

$$\Omega \xrightarrow{X(\cdot)} \mathbb{R} \qquad \text{یا} \qquad X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$



به این ترتیب فضای احتمال (Ω, P, F) به فضای اعداد

Ω: فضای نمونه

P: تابع احتمال

F: مجموعه پیشامدهای احتمال‌پذیر

حقیقی به صورت $(\mathbb{R}, P, \mathbb{B})$ تصویر می‌شود.

$\mathbb{R}$: مجموعه اعداد حقیقی

P: تابع احتمال

$\mathbb{B}$: Borel Field

σ-field

هدف در این بخش این است که پیش از شناخت مفهوم متغیرهای تصادفی،
بتوانیم با آنها کار کنیم و آنها را تجزیه و تحلیل کنیم. به عنوان مثال بتوانیم احتمال
هر پیشامدی در ارتباط با متغیر تصادفی را به دست بیاوریم یا خصوصیات آماری
آن را استخراج کنیم. برای این منظور نیاز به ابزارهایی برای کار با متغیرهای
تصادفی داریم که در ادامه این بخش به آنها می‌پردازیم. توجه به این نکته لازم

است که در فضای متغیرهای تصادفی، اولین ابزاری که در دسترس داریم

تابع احتمال (P) است.

ابتدا با چند مثال ساده ای فراهیم مفهوم متغیر تصادفی را بهتر بشناسیم.

مثال ۱ - آزمایش پرتاب سکه را در نظر می گیریم و فرض می کنیم احتمال شیر آمدن

برابر P باشد.

$$\Omega = \{\underset{\xi_1}{H}, \underset{\xi_2}{T}\}$$

احتمال رخداد H $= P_r\{H\} = P$

اگر بخواهیم در ارتباط با این آزمایش تصادفی، یک متغیر تصادفی تعریف کنیم، می‌توان نوشت:

$$X(\xi) = \begin{cases} 1 & \xi = \xi_1 \text{ یا } H \text{ یا شیر آمدن} \\ 0 \ (-1 \text{ یا}) & \xi = \xi_2 \text{ یا } T \text{ یا خط آمدن} \end{cases}$$

یا با بیان دیگری توان نوشت،

$$X(\xi)=\begin{cases} 1 & \text{H رخ دهد} \quad \text{با احتمال } p \\ 0\ (\text{یا } -1) & \text{T رخ دهد} \quad \text{با احتمال } 1-p \end{cases}$$

یا

$$X(\xi)=\begin{cases} 1 & p \quad \text{با احتمال} \\ 0\ (\text{یا } -1) & 1-p \quad \text{با احتمال} \end{cases}$$

این متغیر تصادفی را متغیر تصادفی برنولی می گوییم.

به طور کلی متغیر تصادفی برنولی برای مدل سازی آزمایش های تصادفی برنولی به کار می رود که در آن احتمال رخداد پیش آمد مورد نظر برابر p است. به عبارت دیگر متغیر تصادفی برنولی نشان دهنده ی رخداد یا عدم رخداد پیش آمد مورد نظر است.

$$X(\xi) = \begin{cases} 1 & P \quad \text{با احتمال} \\ 0 & 1-P \quad \text{با احتمال} \end{cases}$$

مثال 2 : آزمایش پرتاب سکه را 5 بار (به طور مستقل) تکرار کنیم

فرض کنیم احتمال شیر آمدن در هر بار تکرار آزمایش برابر P باشد.

متغیر تصادفی $Y(\xi)$ که نشان دهنده ی تعداد شیر در 5 بار پرتاب سکه

است می‌توانیم به صورت زیر مدل سازی کنیم.

$Y(\xi)$: نشان دهنده‌ی تعداد رخداد شیر در ۵ بار تکرار آزمایش تصادفی

$$\Omega = \overbrace{\{H,T\} \times \cdots \times \{H,T\}}^{\text{پنج بار}} = \Omega_1^5, \quad \Omega_1 = \{H,T\}$$

$$\Omega = \{(H,H,H,H,H),(H,H,H,H,T),\dots,(T,T,T,T,T)\}$$

$$|\Omega| = |\Omega_1|^5 = 2^5$$

$$\Rightarrow \quad y(\xi) \in \{0, 1, \ldots, 5\}$$

$$P_r\{y(\xi)=0\} = ?$$

$$P_r\{y(\xi)=1\} = ?$$

$\vdots$

$$P_r\{y(\xi)=5\} = ?$$

$$P_r\{Y(\xi)=y\} = \binom{5}{y} p^y (1-p)^{5-y}$$

$$y \in \{0,1,2,\dots,5\}$$

این متغیر تصادفی را در حالت کلی متغیر تصادفی دوجمله‌ای می‌گوییم.

* متغیر تصادفی دوجمله‌ای $Y(\xi)$ نشان دهنده‌ی تعداد رخداد پیش آمد مورد نظر در n بار تکرار آزمایش تصادفی است.

$$Y(\xi) \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$$

$$P_r\{Y(\xi) = y\} = \binom{n}{y} p^y (1-p)^{n-y}$$

$$y \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$$

در مورد متغیرهای تصادفی چند متغیره داریم که در آن فرض کرده ایم چه ها در تفاوت سوزش و هم آرین این قرار می گیرد. شکل این متغیرها را نیز در نظر بگیریم.

- متغیرهای تصادفی را با حروف بزرگ Capital letters

نمایش می دهیم.

$X(\zeta), \quad Y(\zeta)$

- مقادیری که متغیر تصادفی اختیار می کند را با حروف کوچک small letters

نمایش می دهیم.

$$P_r\{X(\xi)=x\}$$

متغیر تصادفی

مقداری که متغیر تصادفی اختیار می‌کند

- برای اختصار ، ξ را در متغیرهای تصادفی ، مستتر در نظر می‌گیریم

$$X(\xi) \underset{\text{اختصار}}{\equiv} X$$

در ادامه می خواهیم ابزارهای کار با متغیرهای تصادفی را معرفی کنیم. برای این منظور، متغیرهای تصادفی را به دو دسته کلی متغیرهای تصادفی گسسته و متغیرهای تصادفی پیوسته، دسته بندی می کنیم.

الف) متغیر تصادفی گسسته

متغیر تصادفی X را یک متغیر تصادفی گسسته می گوییم اگر مقادیری از یک مجموعه شمارش پذیر یا گسسته را اختیار کند.

به عنوان مثال متغیر تصادفی برنولی یک متغیر تصادفی گسسته است

$$X(\xi) = X = x \in \{1, 0\}$$

یا متغیر تصادفی دوجمله‌ای که مقادیری از مجموعه‌ی $\{0, 1, \ldots, n\}$ را اختیار می‌کند.

$$X(\xi) \in \{0, 1, \ldots, n\}$$

$$X(\xi) = x \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$$

همان طور که دیدیم در متغیرهای تصادفی گسسته ، به هر یک از نقاط این مجموعه ی مقادیر، می توان یک احتمال نسبت داد.

به طور مثال در متغیر تصادفی دو جمله ای داریم

$$P_r\{X = x\} = \binom{n}{x} p^{x} (1-p)^{n-x}$$

$$x \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$$

یک متغیر تصادفی برنولی داریم

$$P_r\{X=1\} = P$$

$$P_r\{X=0\} = 1-P$$

$$P_r\{X=x\} = \begin{cases} P & x=1 \\ 1-P & x=0 \end{cases}$$

$$x \in \{0,1\}$$

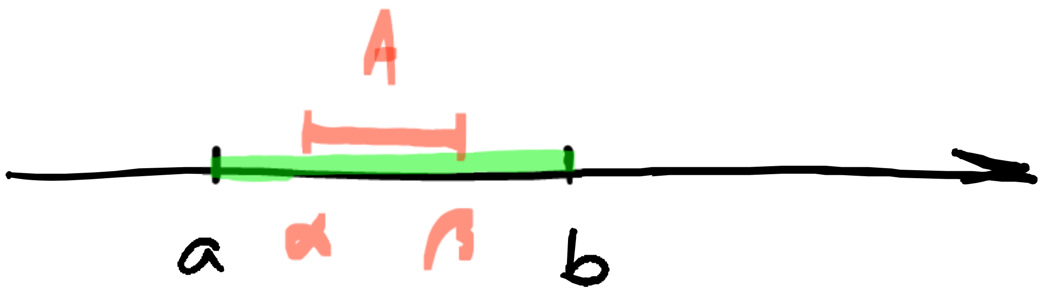
ب) متغیر تصادفی پیوسته

متغیر تصادفی X را یک متغیر تصادفی پیوسته می‌گوییم، اگر مقادیری از یک مجموعه شمارش ناپذیر یا پیوسته را اختیار کند.

خواهیم دید که برای این متغیرهای تصادفی، احتمال نقاط برابر صفر است

$$P_r\{X = x\} = 0$$

به عنوان مثال فرض کنیم متغیر تصادفی X نشان دهنده ی ولتاژ در یک مقاومت در یک مدار الکتریکی باشد که مقادیری در بازه ی $[a, b]$ اختیار می کند.



$$P_r\{X = x\} = 0$$

$$x \in (a,b)$$

(قابل مقایسه با یک تابع چگالی احتمال)

$$P_r\{X \in A\} = P_r\{\alpha \leqslant X \leqslant \beta\}$$

همان طور که گفتیم می خواهیم ابزارهای کار با متغیرهای تصادفی را معرفی کنیم.
اولین ابزار کار برای تجزیه و تحلیل متغیرهای تصادفی، تابع احتمال یک
متغیر تصادفی است. برای معرفی تابع احتمال از متغیرهای تصادفی
گسسته شروع می کنیم و بعد آن را برای متغیرهای تصادفی پیوسته نیز تعمیم می دهیم